PRO GRADU -TUTKIELMA

Eeva Mäkelä

Hiloista ja Boolen algebroista

TAMPEREEN YLIOPISTO
Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikka
Marraskuu 2017

Tampereen yliopisto

Luonnontieteiden tiedekunta

MÄKELÄ, EEVA: Hiloista ja Boolen algebroista

Pro gradu -tutkielma, 33 s.

Matematiikka

Marraskuu 2017

Tiivistelmä

Tämän tutkielman aiheena ovat hilat sekä Boolen algebrat. Yksinkertaistetusti Boolen algebrat ovat erikoistapaus hiloista, jotka puolestaan ovat erikoistapaus osittain järjestetyistä joukoista. Täten myös tutkielman rakenne seuraa kyseistä esittelyjärjestystä. Luvussa 2 esitellään ensin osittain järjestetyt joukot sekä pienimmän ylärajan sekä suurimman alarajan käsitteet ja niiden yksikäsitteisyys. Tämän jälkeen annetaan hilan määritelmä sekä tarkastellaan hilan ehdot täyttäviä rakenteita. Luvussa 3 kootaan Boolen algebran määritelmää tarkastelemalla ensin suurimman ja pienimmän alkion sekä komplementin käsitteitä. Seuraavaksi perehdytään distributiivisuuteen ja tutkitaan kyseistä ominaisuutta hieman syvemmin, kuin mitä Boolen algebran määritteleminen vaatisi. Tämän jälkeen annetaan määritelmä Boolen algebralle sekä todistetaan rakenteen olennaisimpia ominaisuuksia. Luvun lopuksi tehdään vielä katsaus äärellisiin Boolen algebroihin ja määritellään niiden välinen isomorfismi. Tutkielman lopussa luvussa 4 tutustutaan Boolen algebroiden sovellusalueisiin esittelemällä virtapiirejä sekä niiden yhteyttä aiemmissa luvuissa esitettyyn teoriaan esimerkkien kautta. Tutkielman tärkeimpinä lähdeteoksina toimivat Papantonopouloun teos Algebra: Pure and Applied sekä Judsonin teos Abstract Algebra Theory and Applications.

Sisältö

1 Johdanto

Englantilainen matemaatikko George Boole *(1815-1864)* vastusti vahvasti siihen aikaan vallinnutta käsitystä, jonka mukaan matematiikka olisi vain suureiden tai lukujen tiedettä. Hänen näkemyksensä matematiikasta oli, että sisältöä tärkeämpää on muoto: symbolit ja täsmällinen operoiminen niiden avulla. Boolen vuonna 1854 julkaisema teos *Investigation of the Laws of Thought* on matematiikan historian klassikko, joka esitteli formaalin logiikan lisäksi muun muassa uuden algebran suuntauksen, josta nykyisin käytetään nimitystä Boolen algebra. [3, s. 806-811]. Teorian avulla voidaan konstruoida algebrallisia rakenteita, jotka tunnetaan nykyisin hiloina ja Boolen algebroina. Ne esimerkiksi yleistävät toisen tyyppisiä loogisia operaatioita, kuten unionin ja leikkauksen.

Kuten usein käy, matemaattisella perustutkimuksella on myöhemmin runsaasti sovelluskohteita. Näin on käynyt myös Boolen algebrojen kohdalla. Ensimmäiset Boolen algebroiden sovellusalueet liittyivät virtapiirien ja kytkentöjen yksinkertaistamiseen. Nykyisin esimerkiksi tietokonesirujen suunnittelussa Boolen algebroilla on keskeinen rooli. Rakenteet ovat hyödyllisiä myös kaukaisemmilla tieteenaloilla, kuten esimerkiksi sosiologiassa ja biologiassa. [5, s. 240].

Yksinkertaistetusti Boolen algebrat ovat erikoistapaus hiloista, jotka puolestaan ovat erikoistapaus osittain järjestetyistä joukoista. Tästä syystä myös tutkielman rakenne noudattaa kyseistä järjestystä. Luvussa 2 esitellään ensin osittain järjestetyt joukot esimerkkien sekä Hassen diagrammien avulla. Ennen hilan määritelmää käydään esimerkkien avulla läpi pienimmän ylärajan sekä suurimman alarajan käsitteet. Samalla osoitetaan, että jos pienin yläraja ja suurin alaraja ovat olemassa, ovat ne yksikäsitteisiä. Kun tarvittava pohjatieto on kasassa, voidaan seuraavaksi alaluvussa 2.3 antaa hilan määritelmä. Määritelmän jälkeen tarkastellaan hilan ehdot täyttäviä rakenteita ja esitetään hilojen duaalisuusperiaate sekä muita jatkon kannalta olennaisia ominaisuuksia.

Luvussa 3 lähdetään rakentamaan Boolen algebran määritelmää tarkastelemalla ensin suurimman ja pienimmän alkion sekä komplementin käsitteitä. Tämän jälkeen tehdään lyhyt ekskursio distributiivisuuteen ja tutkitaan kyseistä ominaisuutta hieman enemmän, kuin mitä Boolen algebran määritteleminen vaatisi. Määritelmän lisäksi esitetään muun muassa lause semidistributiivisuudesta sekä tarkastellaan hiloja, jotka eivät täytä distributiivisuuden asettamia ehtoja. Alaluvussa 3.3 päästään viimein käsiksi Boolen algebran määritelmään. Määritelmän lisäksi annetaan esimerkkejä tyypillisistä Boolen algebroista sekä esitetään ja todistetaan olennaisimpia ominaisuuksia, kuten suurimman ja pienimmän alkion yksikäsitteisyys sekä duaalisuusperiaate Boolen algebroille. Alaluvussa 3.4 tehdään katsaus äärellisiin Boolen algebroihin. Alaluvun tarkoitusperänä on tutustua Boolen algebroiden väliseen isomorfismiin.

Tutkielman lopussa luvussa 4 tehdään vielä katsaus Boolen algebroiden sovellusalueisiin esittelemällä virtapiirejä ja niiden yhteyttä aiemmissa luvuissa esitettyyn teoriaan. Virtapiireihin liittyvän termistön lisäksi esitetään useampi esimerkki sekä käydään läpi virtapiirien yksinkertaistamiseen liittyvä tekniikka.

Tutkielmassa seurataan päälähteinä sekä Papantonopouloun teosta *Algebra: Pure and Applied* että Judsonin teosta *Abstract Algebra Theory and Applications*. Kyseisiä teoksia on lähinnä täydennetty muiden lähteiden avulla. Lisäksi etenkin suomenkielisen terminologian tukena on ollut Erosen pro gradu –tutkielma *Hilateoriaa*.

Tutkielman lukijan oletetaan tuntevan algebran perusteet sekä omaavan matemaattisen päättelykyvyn ja kehittyneen todistustekniikan.

2 Hiloista

Tässä luvussa määritellään Boolen algebroiden kannalta kaksi olennaista käsitettä: osittain järjestetyt joukot sekä hilat. Määritelmien lisäksi käydään läpi muutama lause ja duaalisuuden periaate hiloille sekä annetaan esimerkkejä ja havainnollistetaan aihetta Hassen diagrammien avulla.

2.1 Osittain järjestetyt joukot

Määritelmä 2.1. Olkoon S joukko ja $\leq$ relaatio joukossa S. Pari $(S, \leq)$ on *osittain järjestetty joukko* (partially ordered set, poset), jos seuraavat kolme aksioomaa täyttyvät aina, kun $x, y, z \in S$.

1. $x \leq x$ (refleksiivisyys),
2. jos $x \leq y$ ja $y \leq x$, niin $x = y$ (symmetrisyys),
3. jos $x \leq y$ ja $y \leq z$, niin $x \leq z$ (transitiivisuus).

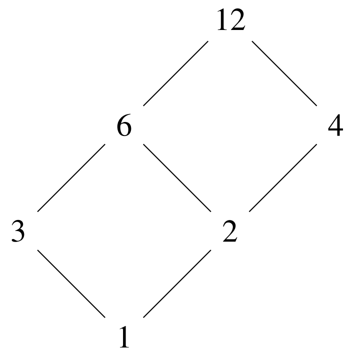
Kun osittain järjestettyyn joukkoon liittyvä relaatio ei ole asiayhteydestä tunnettu tai puhutaan yleisellä tasolla, käytetään relaatiosta yleistä merkintää $\leq$. Muutoin esimerkiksi esimerkkien yhteydessä pyritään käyttämään asiayhteydestä tunnettuja relaatiomerkintöjä. Käydään seuraavaksi läpi muutama havainnollistava esimerkki osittain järjestetyistä joukoista.

Esimerkki 2.1. Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ varustettuna tavanomaisella järjestysrelatiolla $\leq$ on osittain järjestetty joukko $(\mathbb{Z}, \leq)$.

Esimerkki 2.2. Olkoon S joukko, jossa alkioina ovat kaikki luvun 12 positiiviset jakajat. Määritellään järjestysrelaatio siten, että $x \leq y$, jos ja vain jos x jakaa luvun y, eli $x|y$. Nyt $(S, |)$ on osittain järjestetty joukko.

Esimerkki 2.3. Merkitään joukon S potenssijoukkoa, eli joukon S kaikkien osajoukkojen joukkoa, merkinnällä $\mathcal{P}(S)$. Olkoot nyt $A, B \in \mathcal{P}(S)$, ja olkoon $A \leq B$, jos ja vain jos A on joukon B osajoukko, eli $A \subseteq B$. Nyt $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ on osittain järjestetty joukko.

Jokainen äärellinen osittain järjestetty joukko voidaan kuvata Hassen diagrammin muodossa. Olkoon $(S, |)$ äsken määritelty osittain järjestetty joukko. Kuviossa 2.1 on havainnollistettu kyseistä joukkoa Hassen diagrammin avulla.



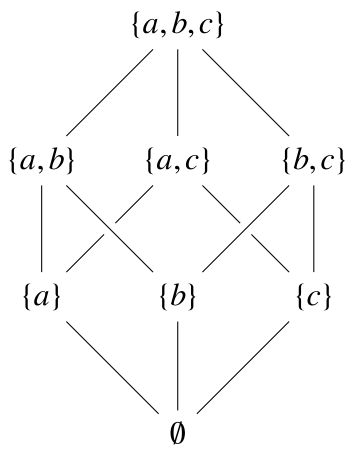
Kuvio 2.1. Joukon S Hassen diagrammi.

Esimerkki 2.4. Olkoon $X = \{a, b, c\}$. Nyt joukon X potenssijoukko $\mathcal{P}(X)$ koostuu seuraavista joukoista:

$$\emptyset \qquad \{a\} \qquad \{b\} \qquad \{c\}$$

$$\{a, b\} \qquad \{a, c\} \qquad \{b, c\} \qquad \{a, b, c\}.$$

Tätä osittain järjestettyä joukkoa $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ voidaan havainnollistaa Hassen diagrammilla, kuten kuviossa 2.2 on tehty.



Kuvio 2.2. Joukon $\mathcal{P}(X)$ Hassen diagrammi.

2.2 Pienin yläraja ja suurin alaraja

Ennen varsinaista hilan määritelmää käydään vielä läpi pienimmän ylärajan ja suurimman alarajan käsitteet.

Määritelmä 2.2. Olkoon $(S, \leq)$ osittain järjestetty joukko ja X joukon S osajoukko. Nyt $y \in S$ on joukon X *yläraja*, jos $x \leq y$ aina, kun $x \in X$. Vastaavasti $z \in S$ on joukon X *alaraja*, jos $z \leq x$ aina, kun $z \in X$. Lisäksi $u \in S$ on joukon X *pienin yläraja* (least upper bound, lub), jos u on joukon X yläraja ja $u \leq y$ aina, kun y on joukon X yläraja. Samoin $v \in S$ on joukon X *suurin alaraja* (greatest lower bound, glb), jos v on joukon X alaraja ja $z \leq v$ aina, kun z on joukon X alaraja.

Esimerkki 2.5. Tarkastellaan edelleen esimerkkiä 2.2 ja valitaan joukon S osajoukoksi $X = \{1, 2, 3\}$, jolloin joukon X ylärajat ovat 6 ja 12, joista pienin yläraja on 6, ja ainoa sekä samalla suurin alaraja on 1.

Lause 2.1. *Olkoon $(S, \leq)$ osittain järjestetty joukko ja olkoon X joukon S epätyhjä osajoukko. Nyt jos joukolla X on pienin yläraja, niin se on yksikäsitteinen. Samoin jos joukolla X on suurin alaraja, niin se on yksikäsitteinen.*

Todistus (vrt. [7, s. 508]). Olkoot u_1 ja u_2 molemmat joukon X pienimpiä ylärajoja. Määritelmän mukaan $u_1 \leq u$ kaikilla joukon X ylärajoilla u. Tästä seuraa myös, että $u_1 \leq u_2$. Samoin koska u_2 on pienin yläraja, tulee olla $u_2 \leq u_1$. Nyt antisymmetrisyyden nojalla pätee $u_1 = u_2$, mistä seuraa ylärajan yksikäsitteisyys. Samankaltaisella päättelyketjulla saadaan todistettua vastaava tulos myös joukon X suurimmille alarajoille. □

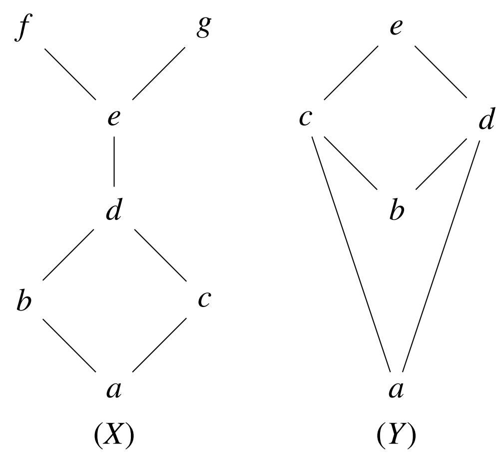
2.3 Hilat

Nyt koossa ovat kaikki hilan määritelmään vaadittavat esitiedot. Seuraavaksi käydään läpi hilan määritelmä sekä muutamia olennaisia lauseita.

Määritelmä 2.3. *Hila* on osittain järjestetty joukko $(H, \leq)$, jossa seuraavat ominaisuudet pätevät aina, kun $a, b \in H$.

1. Pienin yläraja joukolle $\{a, b\}$ on olemassa. Sitä merkitään symbolilla $\vee$ ja kutsutaan nimellä *sup* tai *join*.

2. Suurin alaraja joukolle $\{a, b\}$ on olemassa. Sitä merkitään symbolilla $\wedge$ ja kutsutaan nimellä *inf* tai *meet*.



Kuvio 2.3. Joukkojen X ja Y Hassen diagrammit.

Esimerkki 2.6. Olkoon X joukko, jolloin sen potenssijoukko $\mathcal{P}(X)$ muodostaa hilan $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Olkoot lisäksi A ja B joukkoja siten, että $A,B \in \mathcal{P}(X)$. Nyt pienin yläraja joukoille A ja B on $A \cup B$, sillä selvästi $A \cup B$ on joukkojen yläraja, koska $A \subseteq A \cup B$ ja $B \subseteq A \cup B$. Olkoon nyt joukko C jokin muu yläraja. Tällöin C sisältäisi sekä joukon A että B, jolloin se sisältäisi täten myös joukon $A \cup B$. Siis $A \cup B$ on pienin yläraja eli $A \vee B = A \cup B$. Samaan tapaan osoittautuu, että $A \cap B$ on joukkojen A ja B suurin yläraja, eli $A \wedge B = A \cap B$.

Esimerkki 2.7. Olkoon $\mathbb{Z}_+$ positiivisten kokonaislukujen joukko ja olkoot $x, y \in \mathbb{Z}_+$. Määritellään järjestysrelaatio siten, että $x \leq y$, jos ja vain jos x jakaa luvun y, eli $x|y$. Nyt $(\mathbb{Z}_+, |)$ on osittain järjestetty joukko. Huomataan, että määrittelemällä $a \vee b = \text{pyj}(a, b)$ ja $a \wedge b = \text{syt}(a, b)$, kyseessä on myös hila.

Esimerkki 2.8. Olkoot X ja Y kuviossa 2.3 esitettyjä osittain järjestettyjä joukkoja. Joukko X ei kuitenkaan ole hila, sillä pienintä ylärajaa alkioille f ja g ei ole olemassa. Myöskään joukko Y ei ole hila, sillä suurinta alarajaa alkioille c ja d ei ole olemassa.

Esimerkiksi joukko-opissa on tiettyja duaalisia ehtoja, kuten De Morganin lait. Seuraavaksi todetaan, että tällaisia periaatteita löytyy myös hiloille. Jos $(H, \leq)$ on hila, niin huomataan, että relaation $\leq$ ollessa sekä refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen, myös relaatiolla $\geq$ on nämä ominaisuudet. Lisäksi kun $\leq$ korvataan relaatiolla $\geq$, niin pienin yläraja ensimmäisellä relaatiolla muuttuu suurimmaksi alarajaksi toisella relaatiolla ja päinvastoin. Täten myös $(H, \geq)$ on hila. Tämä tarkastelu johtaa seuraavaan periaatteeseen.

Lause 2.2. *(Duaalisuusperiaate) Jos väite pitää paikkansa jokaisessa hilassa, niin silloin myös duaalinen väite pitää paikkansa jokaisessa hilassa.*

Duaalisessa väitteessä vaihdetaan siis $\leq$ ja $\geq$ keskenään ja vastaavasti $\vee$ ja $\wedge$ vaihdetaan keskenään. Duaalisuusperiaatteeseen nojataan esimerkiksi alla olevan lauseen 2.3 todistuksessa.

Lause 2.3. *Olkoon $(H, \leq)$ hila, ja olkoot a,b ja $c \in H$. Tällöin binäärisillä operaatioilla $\vee$ ja $\wedge$ on seuraavat ominaisuudet:*

1. (vaihdannaisuus) $a \vee b = b \vee a$ ja $a \wedge b = b \wedge a$,
2. (liitännäisyys) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ ja $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$,
3. (idempotenssi) $a \vee a = a$ ja $a \wedge a = a$,
4. (absorptio) $(a \vee b) \wedge a = a$ ja $(a \wedge b) \vee a = a$.

Todistus (vrt. [5, s. 232]). Duaalisuuden periaatteen nojalla jokaisesta kohdasta tarvitsee todistaa vain ensimmäinen osa.

(1) Määritelmän nojalla joukon $\{a, b\}$ pienin yläraja on $a \vee b$ ja samoin joukon $\{b, a\}$ pienin yläraja on $b \vee a$. Koska $\{a, b\} = \{a, b\}$, niin on oltava myös $a \vee b = b \vee a$.

(2) Tavoitteena on osoittaa, että $a \vee (b \vee c)$ ja $(a \vee b) \vee c$ ovat molemmat joukon $\{a, b, c\}$ pienimpiä ylärajoja. Olkoon $d = a \vee b$. Nyt $c \leq d \vee c = (a \vee b) \vee c$. Tiedetään myös, että $a \leq a \vee b = d \leq d \vee c = (a \vee b) \vee c$. Samanlaisella päättelyketjulla saadaan osoitettua myös, että $b \leq (a \vee b) \vee c$. Täten tiedetään, että $(a \vee b) \vee c$ on joukon $\{a, b, c\}$ yläraja. Olkoon nyt u kyseisen joukon jokin toinen yläraja. Tällöin siis $a \leq u$ ja $b \leq u$, eli $d = a \vee b \leq u$. Lisäksi $c \leq u$, joten $(a \vee b) \vee c = d \vee c \leq u$. Täten $(a \vee b) \vee c$ on oltava joukon $\{a, b, c\}$ pienin yläraja. Samalla päättelyllä voidaan todeta, että $a \vee (b \vee c)$ on joukon $\{a, b, c\}$ pienin yläraja. Siis lauseen 2.1 perusteella $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.

(3) Selvästi $a \vee a$ on pienin yläraja joukolle $\{a\}$, samoin a on pienin yläraja kyseiselle joukolle. Täten $a \vee a = a$.

(4) Olkoon $d = a \wedge b$. Selvästi $a \leq a \vee d$. Toisaalta $d = a \wedge b \leq a$, joten $a \vee d \leq a$. Täten $a \vee d = a$ eli $a \vee (a \wedge b) = a$. □

Kun valitaan mielivaltainen joukko H varustettuna operaatioilla $\vee$ ja $\wedge$, herää kysymys, onko kyseessä hila. Seuraava lause todistaa, että näin todella on.

Lause 2.4. *Olkoon H joukko varustettuna operaatioilla $\vee$ ja $\wedge$, jotka täyttävät lauseen 2.3 ehdot. Olkoon lisäksi $\leq$ sellainen joukossa H määritelty relaatio, että $a \leq b$, jos ja vain jos $a \vee b = b$ tai $a \wedge b = a$, kun $a, b \in H$. Nyt H on hila.*

Todistus (vrt. [7, s. 510]). Huomataan aluksi, että ehdot $a \vee b = b$ ja $a \wedge b = a$ ovat yhtäpitäviä, sillä jos $a \vee b = b$, niin vaihdannaisuuden ja absorption nojalla $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = (a \vee b) \wedge a = a$. Toisaalta taas jos oletetaan, että $a \wedge b = a$, niin $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = (b \wedge a) \vee b = b$.

Osoitetaan seuraavaksi, että relaatio $\leq$ on osittainen järjestys. Olkoot $a,b,c \in H$. Idempotenssin nojalla $a \vee a = a$, joten $a \leq a$ ja relaatio on refleksiivinen. Todistetaan sitten antisymmetrisyys. Jos $a \leq b$ ja $b \leq a$ niin $a \vee b = b$ ja $b \vee a = a$. Vaihdannaisuuden nojalla $b = a \vee b = b \vee a = a$, joten $a = b$ ja relaatio on antisymmetrinen. Lisäksi jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \vee b = b$ ja $b \vee c = c$. Liitännäisyyden nojalla $a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$, joten $a \leq c$ ja transitiivisuus on todistettu. Täten $(H, \leq)$ on osittain järjestetty joukko.

Nyt tulee vielä osoittaa, että $(H, \leq)$ on myös hila näyttämällä, että $a \vee b$ on pienin yläraja ja $a \wedge b$ on suurin alaraja joukolle $\{a, b\}$. Todistukset suurimmalle ylärajalle ja pienimmälle alarajalle ovat samankaltaiset, joten näytetään todistus vain pienimmälle ylärajalle. Huomataan ensin, että käyttämällä vaihdannaisuutta ja absorptiota saadaan $a \wedge (a \vee b) = (a \vee b) \wedge a = a$ ja $b \wedge (a \vee b) = (a \vee b) \wedge b = (b \vee a) \wedge b = b$. Täten siis $a \leq a \vee b$ ja $b \leq a \vee b$ ja $a \vee b$ on joukon $\{a, b\}$ yläraja. Osoitetaan vielä, että $a \vee b$ on pienin yläraja. Olkoon $c \in H$ siten, että $a \leq c$ ja $b \leq c$. Nyt $a \vee c = c$ ja $b \vee c = c$. Liitännäisyyttä käyttämällä saadaan $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c$, joten $a \vee b \leq c$. Siis $a \vee b$ on joukon $\{a, b\}$ pienin alaraja. Lause 2.4 on näin todistettu. $\square$

3 Boolen algebroista

Ennen Boolen algebroihin siirtymistä määritellään vielä muutama olennainen käsite esimerkkien avulla. Varsinaisen määritelmän jälkeen laajennetaan aihetietämystä lauseiden ja esimerkkien avulla.

3.1 Suurin ja pienin alkio

Tarkastellaan jälleen hilaa $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, missä $\mathcal{P}(S)$ on joukon S potenssijoukko. Potenssijoukon määritelmän nojalla selvästi suurin alkio joukossa $\mathcal{P}(S)$ on S ja pienin alkio taas on tyhjä joukko $\emptyset$. Olkoon nyt $A \in \mathcal{P}(S)$ joukko. Nyt tiedetään, että $A \cup A' = S$ ja $A \cap A' = \emptyset$, missä A' on joukon A komplementti. Tämä havainto johtaa seuraaviin määritelmiin.

Määritelmä 3.1. Olkoon $(H, \leq)$ hila.

1. Alkiota $I \in H$ kutsutaan *suurimmaksi alkioksi* (unity), jos $a \leq I$ aina, kun $a \in H$.
2. Alkiota $O \in H$ kutsutaan *pienimmäksi alkioksi* (zero), jos $O \leq a$ aina, kun $a \in H$.

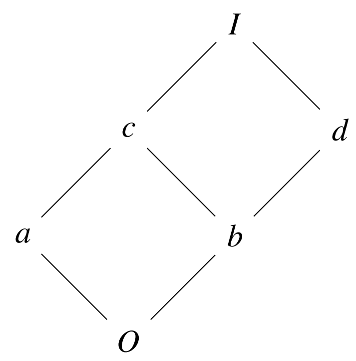
Määritelmä 3.2. Olkoon $(H, \leq)$ hila, joka sisältää sekä suurimman alkion I että pienimmän alkion O. Nyt alkion $a \in H$ *komplementti* on $a' \in H$, jos

1. $a \vee a' = I$ ja
2. $a \wedge a' = 0$.

Sanotaan, että hila $(H, \leq)$ on *komplementoitu*, jos jokaiselle alkiolle $a \in H$ on olemassa komplementti $a' \in H$.

Esimerkki 3.1. Esimerkissä 2.2 kuvattu joukko S voidaan nyt kuvata käyttämällä apuna sekä suurimman että pienimmän alkion symboleita. Sekaannusten välttämiseksi myös muut alkiot on kuvattu kirjainsymboleilla, kuten kuviosta 3.1 näkyy.

Lisäksi joukon S alkiot voidaan taulukoida pienimpien ylärajojen ja suurimpien alarajojen mukaisesti, kuten taulukoissa 3.1 ja 3.2 on tehty. Taulukoista huomataan esimerkiksi, että alkio a on alkion d komplementti ja alkio O taas on alkion I komplementti. Alkioilla c ja b ei kuitenkaan ole komplementteja, joten kaikille



Kuvio 3.1. Joukon S Hassen diagrammi, jossa merkittynä suurin ja pienin alkio.

$\vee$	O	a	b	c	d	I
O	O	a	b	c	d	I
a	a	a	c	c	I	I
b	b	c	b	c	d	I
c	c	c	c	c	I	I
d	d	I	d	I	d	I
I	I	I	I	I	I	I

Taulukko 3.1. Pienimmät ylärajat.

$\wedge$	O	a	b	c	d	I
O	O	O	O	O	O	O
a	O	a	O	a	O	a
b	O	O	b	b	b	b
c	O	a	b	c	b	c
d	O	O	b	b	d	d
I	O	a	b	c	d	I

Taulukko 3.2. Suurimmat alarajat.

joukon S alkioille ei löydy komplementtia. Havainto herättää kysymyksen siitä, millainen joukko on komplementoitu.

3.2 Distributiivisuus

Jotta Boolen algebroille voidaan antaa määritelmä, tarvitaan vielä tieto distriburiivisuudesta. Ominaisuutena distributiivisuus on varsin mielenkiintoinen, joten tässä alaluvussa käsitellään aihetta hieman laajemmin, kuin Boolen algebran määrittelyn kannalta olisi tarpeellista.

Määritelmä 3.3. Olkoon $(H, \leq)$ hila. Hilan sanotaan olevan *distributiivinen*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $a, b, c \in H$:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \text{ ja } a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Lause 3.1. *Yllä olevassa distributiivisuuden määritelmässä 3.3 toinen ehdoista implikoi toisen.*

Todistus (vrt. [1, s. 268]). Oletetaan ensin, että ensimmäinen ehto on voimassa, eli $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ pätee. Osoitetaan, että tällöin myös toinen ehdoista pätee. Nyt oletuksen nojalla saadaan $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c]$. Lauseessa 2.3 esitetyn absorption nojalla pätee $[(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] = a \vee [(a \vee b) \wedge c]$. Käyttämällä seuraavaksi oletusta ja lauseessa 2.3 esitettyä vaihdannaisuutta, saadaan $a \vee [(a \vee b) \wedge c] = a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)]$. Nyt liitännäisyyden ja absorption nojalla $a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] = [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$. Täten on siis saatu johdettua, että $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c)$, joten ensimmäisestä ehdosta seuraa toinen. Todistuksen toinen suunta on duaalinen ensimmäisen kanssa, joten väite on todistettu. $\square$

Lause 3.2. *Kaikilla distributiivisilla hiloilla H pätee:*

$$\text{jos } a \wedge x = a \wedge y \text{ ja } a \vee x = a \vee y, \text{ niin } x = y,$$

missä $a, x, y \in H$.

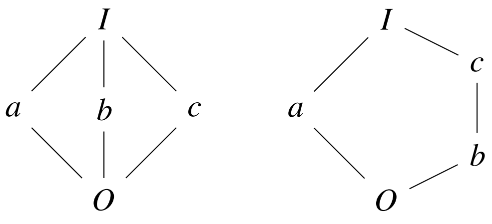
Todistus (vrt. [1, s. 268]). Lauseessa 2.3 esitetyn absorption sekä kommutatiivisuuden nojalla pätee $x = (x \wedge a) \vee x = x \vee (x \wedge a) = x \vee (a \wedge x)$. Käyttämällä lauseen oletusta sekä kommutatiivisuutta ja sen jälkeen distributiivisuutta sekä jälleen kommutatiivisuutta, saadaan $x \vee (a \wedge x) = x \vee (a \wedge y) = x \vee (y \wedge a) = (x \vee y) \wedge (x \vee a) = (y \vee x) \wedge (x \vee a)$. Käyttämällä nyt oletusta sekä sen jälkeen distributiivisuutta, saadaan $(y \vee x) \wedge (x \vee a) = (y \vee x) \wedge (y \vee a) = y \vee (x \wedge a)$. Nyt oletuksen ja absorption nojalla pätee $y \vee (x \wedge a) = y \vee (y \wedge a) = (y \wedge a) \vee y = y$, ja väite on todistettu. $\square$

Esimerkki 3.2. Kaikki hilat eivät välttämättä ole distributiivisia. Kaksi tyyppiesimerkkiä kyseisestä tilanteesta on esitetty kuviossa 3.2. Hila $\mathcal{M}_3$ ei ole distributiivinen, sillä $a \wedge (b \vee c) = a \neq O = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Hila $\mathcal{N}_5$ taas ei ole distributiivinen, sillä $c \wedge (b \vee a) = c \neq b = (c \wedge b) \vee (c \wedge a)$.

Distributiivisuus ei siis ole voimassa kaikilla hiloilla. Alla oleva lause kuitenkin osoittaa, että kaikki hilat ovat semidistributiivisia.

Lause 3.3. *Olkoon* $(H, \preceq)$ *hila, ja olkoot* $a, b, c \in H$. *Nyt voimassa ovat semidistributiiviset lait*

$$a \wedge (b \vee c) \succeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \text{ ja } a \vee (b \wedge c) \preceq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$



$\mathcal{M}_3$ $\mathcal{N}_5$

Kuvio 3.2. Hilojen $\mathcal{M}_3$ ja $\mathcal{N}_5$ Hassen diagrammit.

Todistus (vrt. [1, s. 268]). Koska yllä olevat ehdot ovat duaaliset, tarvitsee hilojen duaalisuusperiaatteen nojalla todistaa, että toinen ehdoista on voimassa kaikissa hiloissa. Todistetaan niistä ensimmäinen. Nyt selvästi a on on yläraja sekä alkiolle $a \wedge b$ että alkiolle $a \wedge c$, joten a on myös yläraja niiden pienimmälle ylärajalle $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, eli $a \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Samoin koska b on yläraja alkiolle $a \wedge b$ ja c on yläraja alkiolle $a \wedge c$, joten alkio $b \vee c$ on yläraja myös alkioiden $a \wedge b$ ja $a \wedge c$ pienimmälle ylärajalle $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, eli $b \vee c \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Tästä seuraa, että $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ on alaraja sekä alkiolle a että $b \vee c$, eli se on alaraja myös niiden pienimmälle alarajalle $a \wedge (b \vee c)$. Siis $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ja väite on todistettu. □

3.3 Boolen algebrat

Aiemmassa alaluvussa 3.2 määriteltiin distributiivisuus, mutta todettiin myös, että kaikki hilat eivät ole distributiivisia. Seuraava luonnollinen kysymys on, millaiset hilat täyttävät distributiivisuuden ehdot. Tähän vastataankin nyt määrittelemällä Boolen algebran käsite sekä antamalla esimerkkejä ehdot täyttävistä rakenteista.

Määritelmä 3.4. *Boolen algebra* on hila $(B, \preceq, \vee, \wedge)$, jossa on sekä suurin alkio että pienin alkio ja jossa seuraavat ehdot täyttyvät:

1. Distributiivisuus pätee kaikilla $a, b, c \in B$,
2. Kaikille alkioille $a \in B$ on olemassa komplementti $a' \in B$.

Esimerkki 3.3. Rakenne $(\mathcal{P}(S), \subseteq, \cap, \cup)$ on tyypillinen Boolen algebra, missä $\mathcal{P}(S)$ on minkä tahansa joukon S potenssijoukko. Kyseisessä Boolen algebrassa joukko S on suurin alkio ja $\emptyset$ on pienin alkio sekä $\vee$ on joukkojen unioni ja $\wedge$ leikkaus. Myöhemmin selviää, että potenssijoukko on yksi tärkeimmistä Boolen algebroista.

Lause 3.4. *Olkoon* $(B, \preceq, \vee, \wedge)$ *Boolen algebra. Nyt kaikilla* $a \in B$ *pätee* $a \wedge I = a$ *ja* $a \vee O = a$.

Todistus. Määritelmän 3.2 ja vaihdannaisuuden nojalla $a \wedge I = a \wedge (a \vee a') = (a \vee a') \wedge a$. Nyt voidaan suoraan soveltaa absorptiota, mistä saadaan $(a \vee a') \wedge a = a$ ja ensimmäinen osuus on todistettu.

Samalla päättelyllä saadaan $a \vee O = a \vee (a \wedge a') = (a \wedge a') \vee a = a$ ja lause on todistettu. □

Lause 3.5. *Olkoon* $(B, \preceq, \vee, \wedge)$ *Boolen algebra.*

1. Suurin alkio I ja pienin alkio O ovat yksikäsitteisiä.
2. Alkion $a \in B$ komplementti $a' \in B$ on yksikäsitteinen.

Todistus (vrt. [7, s. 512]). (1) Olkoot e_1 ja e_2 identiteettialkioita operaation $*$ suhteen joukossa B. Tällöin $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$. Näin ollen alkiot I ja O ovat yksikäsitteisiä lauseen 3.4 perusteella.

(2) Olkoon $a \in B$ ja olkoot $b, c \in B$ molemmat alkion a komplementteja. Nyt edellisen lauseen 3.4 ja komplementtien määritelmän 3.2 nojalla $b = b \vee O = b \vee (a \wedge c)$. Nyt absorption, vaihdannaisuuden ja komplementtien määritelmän nojalla $b \vee (a \wedge c) = (b \vee a) \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) = I \wedge (b \vee c) = (b \vee c)$, joten $b = b \vee c$. Samaan tapaan saadaan, että $c = c \vee b$. Täten $b = b \vee c = c \vee b = c$. Siis alkion a komplementti on yksikäsitteinen. □

Lause 3.6. *(Duaalisuusperiaate Boolen algebroille) Jos väite pitää paikkansa jokaisessa Boolen algebrassa, niin silloin myös duaalinen väite pitää paikkansa jokaisessa Boolen algebrassa.*

Boolen algebroilla on paljon mielenkiintoisia ominaisuuksia. Alle on listattu muutamia niistä.

Lause 3.7. *Olkoon* $(B, \preceq, \vee, \wedge)$ *Boolen algebra. Nyt kaikilla* $a, b \in B$ *pätee*

1. $a \wedge O = O$ ja $a \vee I = I$
2. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ ja $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ (De Morganin lait)
3. $(a')' = a$
4. $O' = I$ ja $I' = O$.

Todistus (vrt. [7, s. 513]). Duaalisuuden periaatteen nojalla kohdista (1),(2) ja (4) tarvitsee todistaa vain ensimmäinen osuus.

(1) Komplementin määritelmän ja liitännäisyyden nojalla $a \wedge O = a \wedge (a \wedge a') = (a \wedge a) \wedge a' = a \wedge a' = O$.

(2) Huomataan aluksi, että käyttämällä distributiivisuutta, vaihdannaisuutta ja liitännäsyyttä saadaan, että $(a \wedge b) \wedge (a' \vee b') = [(a \wedge b) \wedge a'] \vee [(a \wedge b) \wedge b'] = [(a \wedge a') \wedge b] \vee [a \wedge (b \wedge b')]$. Nyt komplementin määritelmän nojalla $[(a \wedge a') \wedge b] \vee [a \wedge (b \wedge b')] = (O \wedge b) \vee (a \wedge O) = O \vee O = O$. Lisäksi samaan tapaan huomataan, että $(a \wedge b) \vee (a' \vee b') = [a \vee (a' \vee b')] \wedge [b \vee (a' \vee b')] = [(a \vee a') \vee b'] \wedge [a' \vee (b \vee b')] = (I \vee b') \wedge (a' \vee I) = I \wedge I = I$. Tästä seuraa, että $a' \vee b'$ on alkion $a \wedge b$ komplementti.

(3) Koska $a' \wedge a = a \wedge a' = 0$ ja $a' \vee a = a \vee a' = 1$, niin a on alkion a' komplementti. Koska komplementti on yksikäsitteinen, niin oltava $(a')' = a$.

(4) Lauseen 3.4 nojalla $O \vee I = I$ ja $O \wedge I = O$. Tästä seuraa, että O ja I ovat toistensa komplementteja, eli $O' = I$ ja $I' = O$. □

Esimerkki 3.4. Olkoon $S = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ joukko, jossa alkioina ovat kaikki luvun 30 positiiviset kokonaislukujakajat ja olkoon $a \leq b$, jos luku a jakaa luvun b, eli $a|b$. Silloin $(S, |)$ on osittain järjestetty joukko, joka voidaan esittää Hassen diagrammin muodossa, kuten kuvassa 3.3. Kaikilla $a, b \in S$ pätee, että suurin yhteinen tekijä $\mathrm{syt}(a, b)$ ja pienin yhteinen jaettava $\mathrm{pyj}(a, b)$ kuuluvat joukkoon S. Huomataan, että $a \vee b = \mathrm{pyj}(a, b)$ ja $a \wedge b = \mathrm{syt}(a, b)$, joten $(S, |)$ on hila.

Todistetaan seuraavaksi distributiivisuus. Jos $a, b, c \in S$, niin ne ovat muotoa

$$a = 2^{r_2} 3^{r_3} 5^{r_5} \qquad b = 2^{s_2} 3^{s_3} 5^{s_5} \qquad c = 2^{t_2} 3^{t_3} 5^{t_5},$$

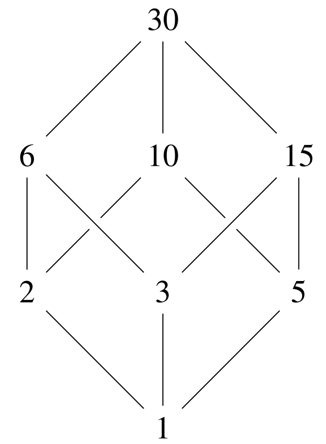
missä eksponentit ovat joko 0 tai 1. Esimerkiksi luku 6 on tällöin muotoa $2^1 3^1 5^0$. Alkuluku p on tässä tapauksessa joko 2, 3 tai 5. Väite

$$\mathrm{syt}(a, \mathrm{pyj}(b, c)) = \mathrm{pyj}(\mathrm{syt}(a, b), \mathrm{syt}(b, c))$$

saadaan muotoon

$$\min(r_p, \max(s_p, t_p)) = \max(\min(r_p, s_p), \min(r_p, t_p)),$$

mikä on helppo todeta tapauksittain. Siis $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Lauseen 3.1 nojalla distributiivisuuden todistamiseksi riittää osoittaa vain toinen ehdoista, joten distributiivisuus on täten todistettu kokonaisuudessaan.



Kuvio 3.3. Joukon S Hassen diagrammi.

Jotta saadaan osoitettua rakenne Boolen algebraksi, tulee vielä näyttää, että jokaisella alkiolla on komplementti. Valitaan nyt kaikilla $a \in S$ komplementiksi $a' = 30/a$. Nyt $a \vee a' = \mathrm{pyj}(a, 30/a) = 30$ ja $a \wedge a' = \mathrm{syt}(a, 30/a) = 1$, joten a' todella on luvun a komplementti. Joukon S suurin alkio on selvästi 30 ja pienin alkio on 1. Täten rakenne $(B, |, \mathrm{syt}, \mathrm{pyj})$ on Boolen algebra.

Esimerkki 3.5. Olkoon $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ kuten esimerkissä 2.2 ja olkoon $a \preceq b$, jos luku a jakaa luvun b. Selvästi joukon S suurin alkio on 12 ja pienin alkio on 1. Tarkastellaan nyt lukua 6 ja oletetaan, että $\mathrm{syt}(6, a) = 1$ Kun käydään läpi kaikki muut viisi alkiota joukossa S huomataan, että tulee olla $a = 1$. Kuitenkin tällöin $\mathrm{pyj}(6, 1) = 6 \neq 12$. Alkiolle 6 ei siis löydy alkioparia, joka täyttäisi molemmat komplementit ehdot. Tästä syystä hila $(S, |)$ ei ole Boolen algebra. Tämän ja aikasemman esimerkin 3.4 ero on siinä, että luvun 12 alkulukuhajotelma on muotoa $12 = 2 * 2 * 3$, jossa on toistuva tekijä, kun taas luvulla $30 = 2 * 3 * 5$ mikään tekijä ei toistu.

Esimerkki 3.6. Olkoon $B = \{0, 1\}$ joukko, joka sisältää binäärinumerot eli bitit. Määritellään, että $0 \preceq 1$, jolloin alkiot muodostavat niin kutsutun 2-ketjun. Tätä on havainnollistettu kuviossa 3.4. Kyseisille alkioille on olemassa myös komplementit sekä suurimmat ylärajat ja pienimmät alarajat, jotka on laskettu taulukossa 3.3.

Myös distributiivisuus pätee, sillä joukkoa voidaan verrata kahden alkion potenssijoukkoon $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$, missä $A = \{a\}$. Kyseisen potenssijoukon tiedetään muodostavan Boolen algebran, jonka Hassen diagrammi on täsmälleen samanlainen kuin joukon B. Koska $\mathcal{P}(A)$ on distibutiivinen, täten myös B on distributiivinen ja näin myös Boolen algebra.

Kuvio 3.4. Joukon B Hassen diagrammi.

x	y	x'	y'	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1

Taulukko 3.3. Joukon B ominaisuuksia taulukoituna.

Edellisessä esimerkissä vedottiin osittain Boolen algebroiden väliseen isomorfismiin. Tähän perehdytään tarkemmin seuraavassa alaluvussa.

3.4 Äärelliset Boolen algebrat

Aluksi määritellään äärellisen Boolen algebran käsite ja siihen liittyvä isomorfismi. Tavoitteena on lopulta osoittaa, että jos B on Boolen algebra, niin tällöin on olemassa sellainen joukko X, että B on isomorfinen potenssijoukosta $\mathcal{P}(X)$ muodostetun Boolen algebran kanssa.Tämän todistamiseksi täytyy kuitenkin ensin esittää muutama määritelmä sekä apulause.

Jatkossa Boolen algebrasta käytetään lyhyttä merkintää B merkinnän $(B, \leq, \vee, \wedge)$ sijasta. Tällöin Boolen algebraa ei pidä sekoittaa pelkkään joukkoon B. Asiayhteydestä selviää, kumpaa tarkoitetaan.

Määritelmä 3.5. Boolen algebran B sanotaan olevan *äärellinen Boolen algebra*, jos joukossa B on äärellinen määrä alkioita.

Määritelmä 3.6. Olkoot B ja C äärellisiä Boolen algebroita. Bijektiivinen kuvaus $\phi : B \to C$ on *isomorfismi*, jos

1. $\phi(a \vee_B b) = \phi(a) \vee_C \phi(b)$
2. $\phi(a \wedge_B b) = \phi(a) \wedge_C \phi(b)$

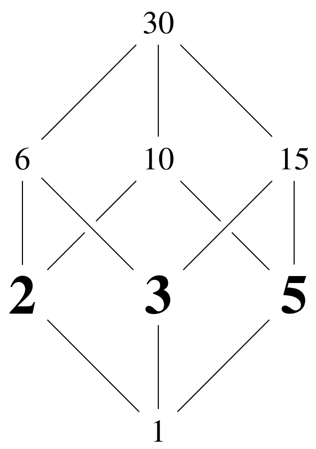
aina, kun $a, b \in B$. Tämä tarkoittaa siis sitä, että kuvaus on bijektiivisyyden lisäksi pienimmän ylärajan ja suurimman alarajan säilyttävä. Jos tällainen isomorfismi on olemassa, niin sanotaan, että joukot B ja C ovat keskenään *isomorfiset*.

Yllä olevassa määritelmässä 3.6 merkintöjä $\vee$ ja $\wedge$ käytettiin kahdessa eri merkityksessä, mutta ne erotettiin toisistaan alaindeksin avulla. Jatkossa näin ei kuitenkaan tehdä, joten asiaan on syytä kiinnittää huomiota.

Esimerkki 3.7. Olkoon $B = \mathcal{P}(X)$, missä X on jokin kolmen alkion joukko. Nyt B on isomorfinen esimerkissä 2.4 esitellyn Boolen algebran kanssa. Kyseisessä esimerkissä X on itse asiassa kolmen alkion joukko $\{a, b, c\}$. Samoin esimerkissä 3.4 esitetty Boolen algebra ja B ovat keskenään isomorfiset.

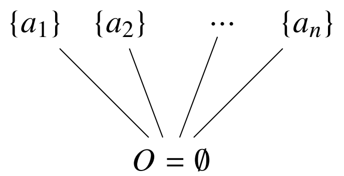
Määritelmä 3.7. Olkoon B äärellinen Boolen algebra. Alkio $a \in B$ on joukon B *atomi*, jos $a \neq O$ ja $a \wedge b = a$, kun $b \in B$ ja $b \neq O$. Toisin sanoen, ei ole olemassa alkiota $b \neq a$ siten, että $O \leq b \leq a$.

Esimerkki 3.8. Esimerkissä 3.4 atomit ovat 2,3 ja 5. Havainnollistamisen tueksi kuviossa 3.5 joukon S atomit on korostettu. Esimerkiksi alkio 6 ei tässä tapauksessa voi olla atomi, sillä $O \leq 2 \leq 6$. Samalla tehdään havainto, että 2,3 ja 5 ovat kaikki alkulukuja.



Kuvio 3.5. Joukon B Hassen diagrammi, jossa atomit on korostettu.

Esimerkki 3.9. Olkoon $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Nyt Boolen algebrassa $\mathcal{P}(S)$ atomeja ovat kaikki yhden alkion joukot $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}$. Tämä tilanne on havainnolistettu kuviossa 3.6.



Kuvio 3.6. Joukon $\mathcal{P}(S)$ atomit Hassen diagrammin avulla.

Lause 3.8. *Olkoon B äärellinen Boolen algebra. Nyt jos $b \in B$ ja $b \neq O$, niin on olemassa atomi $a \in B$ siten, että $a \leq b$.*

Todistus (vrt. [5, s. 236]). Jos b on atomi, niin valitaan $a = b$ ja väite on selvä. Jos taas b ei ole atomi, niin on olemassa alkio $b_1 \in B$ siten, että $b_1 \neq O$ ja $O \leq b_1 \leq b$. Jos nyt b_1 on atomi, on väite todistettu. Jos näin ei kuitenkaan ole, valitaan jälleen alkio $b_2 \in B$ siten, että $b_2 \neq O$ ja $O \leq b_2 \leq b_1$. Jälleen jos b_2 on atomi, väite on todistettu. Jos näin ei vieläkään ole, jatketaan vastaavanlaista prosessia, kunnes sopiva alkio löytyy. Tällä menettelyllä saadaan aikaiseksi alkioiden ketju, joka näyttää seuraavalta:

$$O \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1 \leq b.$$

Koska B on äärellinen Boolen algrebra, niin myös kyseinen ketju on päättyvä. Tämä tarkoittaa, että jollakin kokonaisluvulla n, b_n on atomi. Valitaan siis $a = b_n$. □

Apulause 3.9. *Olkoon B Boolen algebra ja olkoot $a, b \in B$. Nyt seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

1. $a \leq b$
2. $a \wedge b' = O$
3. $a' \vee b = I$.

Todistus (vrt. [5, s. 237]). (1) $\Rightarrow$ (2) Oletetaan siis ensin, että $a \leq b$, mistä seuraa, että $a \vee b = b$. Tällöin $a \wedge b' = a \wedge (a \vee b)'$. Nyt lauseen 3.7 kohdan 2 sekä liitännäisyyden nojalla saadaan $a \wedge (a \vee b)' = a \wedge (a' \wedge b') = (a \wedge a') \wedge b'$. Lisäksi käyttämällä komplementtien määritelmää 3.2 sekä lauseen 3.7 kohtaa 1 saadaan $(a \wedge a') \wedge b' = O \wedge b' = O$. Siis $a \wedge b' = O$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Oletetaan, että $a \wedge b' = O$. Huomataan, että lauseen 3.7 kohdan 2 nojalla $a' \vee b = (a \wedge b')'$. Nyt käyttämällä oletusta ja lauseen 3.7 kohtaa 4 saadaan $(a \wedge b')' = O' = I$, eli $a' \vee b = I$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Oletetaan, että $a' \vee b = I$. Nyt lauseen 3.4 ja oletuksen perusteella saadaan, että $a = a \wedge I = a \wedge (a' \vee b)$. Käyttämällä distributiivisuutta ja komplementin määritelmää saadaan $a \wedge (a' \vee b) = (a \wedge a') \vee (a \wedge b) = O \vee (a \wedge b) = a \wedge b$. Siis $a \wedge b = a$, eli on oltava $a \leq b$. □

Apulause 3.10. *Olkoon B äärellinen Boolen algebra ja olkoot $b, c \in B$ alkioita siten, että $b \nleq c$. Nyt on olemassa atomi $a \in B$ siten, että $a \leq b$ ja $a \nleq c$.*

Todistus (vrt. [7, s. 515]). Koska $b \nleq c$, niin apulauseen 3.9 nojalla $b \wedge c' \neq O$. Nyt apulauseen 3.8 nojalla on olemassa atomi a siten, että $a \leq b \wedge c'$. Tästä seuraa suoraan, että $a \leq b$ ja $a \leq c'$. Todistetaan vielä, että $a \nleq c$. Tehdään vastaoletus, että pätisi $a \leq c$. Tällöin tulisi siis olla $a \leq c \wedge c' = O$, eli tulisi olla $a = O$. Tässä on ristiriita, sillä a on atomi. Täten siis $a \nleq c$ ja lause on todistettu. □

Apulause 3.11. *Olkoon B on äärellinen Boolen algebra ja olkoon $b \in B, b \neq O$. Olkoot lisäksi $a_1, \ldots, a_n \in B$ kaikki ne atomit, jotka toteuttavat ehdon $a_i \leq b$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nyt $b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$.*

Jos $a, a_1, \ldots, a_n \in B$ ovat sellaisia atomeja, että $a \leq b$, $a_i \leq b$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ja $b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$, niin $a = a_i$ jollakin indeksin $i \in \{1, \ldots, n\}$ arvolla.

Todistus (vrt. [5, s. 237]). Olkoon $c = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$. Koska $a_i \leq b$ kaikilla a_i, niin on oltava $c \leq b$. Nyt tavoitteena on osoittaa, että $b \leq c$, jolloin antisymmetrisyyden nojalla $c = b$. Tehdään vastaoletus, että $b \nleq c$. Tällöin apulauseen 3.10 mukaan olisi olemassa atomi a siten, että $a \leq b$ ja $a \nleq c$. Nyt koska a olisi atomi ja $a \leq b$, voidaan olettaa, että $a = a_i$ jollakin a_i. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä $a_i \leq c$. Täten $b \leq c$ eli $b = c$.

Todistetaan sitten lauseen toinen kohta. Oletetaan siis, että $b = a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n$ ja a on atomi siten, että $a \leq b$. Tällöin pätee $a = a \wedge b = a \wedge (a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee (a \wedge a_2) \vee ... \vee (a \wedge a_n)$. Koska $a, a_1, ..., a_n$ ovat atomeita, niin jokaisella termillä $(a \wedge a_i)$ pätee $(a \wedge a_i) = O$ tai $(a \wedge a_i) = a$. Jotta yllä oleva ehto pätee, niin ainakin yhdellä termillä on kuitenkin oltava $(a \wedge a_i) = a$. Tämä on mahdollista vain, jos $a = a_i$. □

Nyt koossa on kaikki tarvittava tämän luvun päälauseen todistamiseksi.

Lause 3.12. *Olkoon B äärellinen Boolen algebra. Nyt B on isomorfinen potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ kanssa, missä X on jokin äärellinen joukko.*

Todistus (vrt. [5, s. 238]). Tarkastetaan ensin erikoistapaus $|B| = 1$. Olkoon tällöin $a \in B$ joukon B ainoa alkio. Olkoon nyt $X = \emptyset$, jolloin myös $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ ja voidaan määritellä triviaali isomorfismi $\phi(a) = \emptyset$, missä $a \in B$ ja väite on todistettu.

Oletetaan sitten, että $|B| > 1$. Osoitetaan, että B on isomorfinen joukon $\mathcal{P}(X)$ kanssa, missä X on joukon B kaikkien atomien joukko. Olkoon nyt $a \in B, a \neq O$. Apulauseen 3.11 nojalla voidaan kirjoittaa $a = a_1 \vee \cdots \vee a_n$, missä $a_1, \ldots, a_n$

ovat atomeita, joten ne kuuluvat joukkoon X. Tällöin voidaan määritellä kuvaus $\phi : B \to \mathcal{P}(X)$ siten, että

$$\phi(a) = \phi(a_1 \vee \cdots \vee a_n) = \{a_1, \ldots, a_n\},$$

missä alkio kuvautuu siis atomiensa joukolle. Lisäksi määritellään, että $\phi(O) = \emptyset$.

Osoitetaan, että kuvaus ϕ on surjektio. Todistetaan, että jokaista joukkoa $y \in \mathcal{P}(X)$ kohti on olemassa sellainen $x \in B$, että $\phi(x) = y$. Koska $\phi(O) = \emptyset$, niin väite pätee, kun $y = \emptyset$. Olkoon nyt $y \neq \emptyset$, jolloin $y \in \mathcal{P}(X)$ on joukko atomeita, eli $y = \{a_1, \ldots, a_y\}$. Olkoon nyt $x = a_1 \vee \cdots \vee a_y$, $x \in B$. Nyt kaikki $a_i \in y$ ovat apulauseen 3.11 nojalla alkion x atomeita, eli $a_i \leq x$, kun $a_i \in y$. Lisäksi pätee, että $a_k \not\leq x$, kun $a_k \notin y$. Täten $\phi(x) = \phi(a_1 \vee \cdots \vee a_y) = \{a_1, \ldots, a_y\} = y$ ja surjektiivisuus on todistettu.

Osoitetaan sitten, että kyseessä on injektio. Todistetaan, että kaikilla $a, b \in B$ pätee, että jos $\phi(a) = \phi(b)$, niin $a = b$. Tarkastetaan ensin erikoistapaukset. Olkoon $a = O$ ja olkoon $\phi(a) = \phi(b)$. Tällöin pätee $\phi(a) = \emptyset$, joten $\emptyset = \phi(b)$. Täten on oltava myös $b = O$, joten väite pätee. Samaan tapaan jos aluksi pätee $b = O$, niin päädytään tulokseen, että oltava myös $a = O$. Tarkastetaan nyt tapaus $a, b \neq O$. Olkoot $a = a_1 \vee \cdots \vee a_n$, $b = b_1 \vee \cdots \vee b_m \in B$, missä a_i ja b_j ovat atomeita. Jos $\phi(a) = \phi(b)$, niin $\{a_1, \ldots, a_n\} = \{b_1, \ldots, b_m\}$, joten $a = b$ ja kuvaus on injektio ja täten bijektio.

Osoitetaan vielä, että kuvaus ϕ täyttää määritelmän 3.6 ehdot. Olkoot a ja b alkioita, kuten yllä.

Todistetaan ensin määritelmän 3.6 ehto 1. Tarkastetaan aluksi erikoistapaukset. Olkoon $a = O$. Nyt $\phi(a \vee b) = \phi(O \vee b) = \phi(b)$. Tällöin kuvauksen määritelmän ja joukkojen ominaisuuksien nojalla saadaan $\phi(b) = \{b_1, \ldots, b_m\} = \emptyset \cup \{b_1, \ldots, b_m\}$. Nyt käyttämällä kuvauksen määritelmää toiseen suuntaan, saadaan lopulta $\emptyset \cup \{b_1, \ldots, b_m\} = \phi(a) \cup \phi(b)$ ja operaation $\vee$ säilyvyys on todistettu. Jos olisi $b = O$, niin todistusketju olisi samankaltainen. Olkoon vielä $a, b = O$, jolloin samaan tapaan saadaan $\phi(a \vee b) = \phi(O \vee O) = \phi(O) = \emptyset = \emptyset \cup \emptyset = \phi(O) \cup \phi(O) = \phi(a) \cup \phi(b)$. Tarkastetaan lopuksi yleinen tapaus $a, b \neq O$. Operaation $\vee$ liitännäisyyden perusteella saadaan, että $\phi(a \vee b) = \phi((a_1 \vee \cdots \vee a_n) \vee (b_1 \vee \cdots \vee b_m)) = \phi(a_1 \vee \cdots \vee a_n \vee b_1 \vee \cdots \vee b_m)$. Nyt kuvauksen ϕ määritelmän perusteella saadaan $\phi(a_1 \vee \cdots \vee a_n \vee b_1 \vee \cdots \vee b_m) = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$. Kun käytetään joukkojen unionin määritelmää, niin lauseke saadaan muotoon $\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\} = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{b_1, \ldots, b_m\}$. Käyttämällä kuvauksen määritelmää toiseen suuntaan, saadaan lopulta $\{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{b_1, \ldots, b_m\} = \phi(a_1 \vee \cdots \vee a_n) \cup \phi(b_1 \vee \cdots \vee b_m) = \phi(a) \cup \phi(b)$, ja ensimmäinen ehto määritelmästä on 3.6 todistettu.

Todistetaan sitten ehto 2. Tarkastetaan jälleen erikoistapaukset ensin. Olkoon $a = O$. Tällöin $\phi(a \wedge b) = \phi(O \wedge b) = \phi(O) = \emptyset$. Nyt joukkojen ominaisuuksien ja kuvauksen määirtelmän nojalla saadaan $\emptyset = \emptyset \cap \{b_1, \ldots, b_m\} = \phi(O) \cap \phi(b) = \phi(a) \cap \phi(b)$ ja väite on todistettu. Samaan tapaan jos $b = O$, niin todistusketju on sama. Olkoon vielä $a, b = O$. Nyt $\phi(a \wedge b) = \phi(O \wedge O) = \phi(O) = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = \phi(O) \cap \phi(O) = \phi(a) \cap \phi(b)$ ja väite on todistettu.

Tarkastetaan vielä yleinen tapaus, eli olkoon $a, b \neq O$. Käyttämällä kuvauksen ϕ määritelmää saadaan, että $\phi(a \wedge b) = \phi((a_1 \vee \cdots \vee a_n) \wedge (b_1 \vee \cdots \vee b_m))$. Nyt käyttämällä distributiivisuutta useaan kertaan saadaan lopulta lauseke muotoon $\phi((a_1 \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge b_2) \vee \cdots \vee (a_n \wedge b_m))$, jossa esiintyy siis jokainen pari $a_i \wedge b_j$, missä $i \in \{1, \ldots, n\}$ ja $j \in \{1, \ldots, m\}$. Koska jokainen lausekkeen alkio on atomi, yksittäisten parien suurin alaraja on joko O tai parin atomit ovat samat, jolloin alaraja on atomi itse. Merkitään näitä alkoiden yhteisiä atomeita kirjaimella c ja alaindeksillä. Tällöin lauseke saadaan muotoon $\phi(O \vee O \vee \cdots \vee O \vee c_1 \vee c_2 \cdots \vee c_k) = \phi(c_1 \vee c_2 \cdots \vee c_k)$. Kuvauksen ϕ määritelmän nojalla pätee $\phi(c_1 \vee c_2 \vee \cdots \vee c_k) = \{c_1, \ldots, c_k\}$. Soveltamalla joukkojen ominaisuuksia ja kuvauksen määritelmää toiseen suuntaan saadaan lopulta $\{c_1, \ldots, c_k\} = \{a_1, \ldots, a_n\} \cap \{b_1, \ldots, b_m\} = \phi(a) \cap \phi(b)$ ja ehto 2 on todistettu.

Täten kuvaus on siis isomorfismi ja väite on kokonaisuudessaan todistettu. □

Lause 3.13. *Olkoon B äärellinen Boolen algebra. Nyt $|B| = 2^n$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, missä $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ on luonnollisten lukujen joukko.*

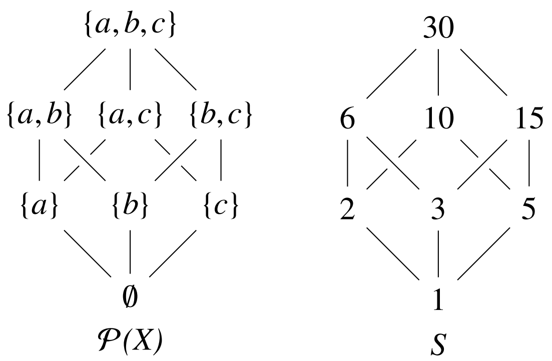
Todistus (vrt. [1, s. 278] ja [7, s. 517]). Tarkastetaan ensin erikoistapaukset. Jos $|B| = 1$, niin $n = 0$, sillä $|B| = 2^0 = 1$ ja väite on selvä. Oletetaan nyt, että $|B| > 1$. Lisäksi oletetaan tunnetuksi, että jos $|S| = n$, missä n on positiivinen kokonaisluku, niin $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$ (kts. esim. [7, s. 11]). Aikaisemmin esitetyn lauseen 3.12 nojalla jos B on Boolen algebra, niin on olemassa bijektiivinen kuvaus $\phi : B \to \mathcal{P}(S)$. missä S on jokin äärellinen joukko. Koska kyseessä on bijektio, niin on oltava $|B| = |\mathcal{P}(S)|$. Nyt jos $|S| = n$, niin $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$, eli $|B| = 2^n$. □

Esimerkki 3.10. Palataan esimerkin 2.4 Boolen algebraan $\mathcal{P}(X)$, missä $X = \{a, b, c\}$ sekä esimerkin 3.4 Boolen algebraan S, missä $S = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Kuviossa 3.7 näkyvien Hassen diagrammien perusteella on ilmeistä, että nämä kaksi Boolen algebraa ovat keskenään isomorfiset. Esimerkiksi yksi mahdollinen isomorfismi $\phi : \mathcal{P}(X) \to S$ on seuraava:

$$\phi(\{a\}) = 2 \qquad \phi(\{b\}) = 3 \qquad \phi(\{c\}) = 5 \qquad \phi(\{a,b\}) = 6$$

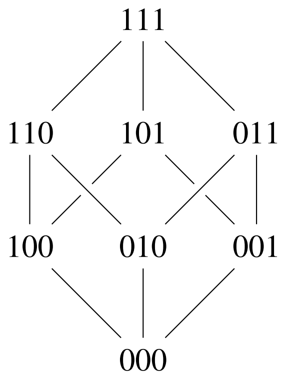
$$\phi(\{a,c\}) = 10 \qquad \phi(\{b,c\}) = 15 \qquad \phi(\{a,b,c\}) = 30 \qquad \phi(\emptyset) = 1.$$

Lisäksi huomataan, että lauseen 3.13 mukaisesti kummankin esimerkissä esitellyn äärellisen Boolen algebran koko on 2^n, missä $n = 3$.



Kuvio 3.7. Boolen algebrojen $\mathcal{P}(X)$ ja S Hassen diagrammit vierekkäin.

Esimerkki 3.11. Olkoon $\mathcal{P}(X)$ Boolen algebra, jolloin lauseen 3.13 mukaisesti $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ ja lisäksi $|X| = n$. Nyt kaikki joukon $\mathcal{P}(X)$ aliryhmät voidaan esittää nollista ja ykkösistä koostuvina bittijonoina, joiden pituus on n. Tätä on havainnollistettu kuviossa 3.8, missä esimerkin 3.10 Boolen algebran $\mathcal{P}(X)$ alkiot on nyt esitetty kolmen merkin mittaisina bittijonoina.



Kuvio 3.8. Boolen algebran $\mathcal{P}(X)$ Hassen diagrammi, jossa alkiot on esitetty bittijonoina.

Esimerkki 3.12. Tarkastellaan joukkoa $\mathbb{Z}_2^m$, joka sisältää kaikki mahdolliset m-mittaiset bittijonot, missä m on äärellinen positiivinen kokonaisluku. Määritellään osittainen järjestys joukossa $\mathbb{Z}_2$ siten, että $0 \preceq 1$. Olkoot nyt $a = (a_1 a_2 \cdots a_m) \in \mathbb{Z}_2^m$ ja $b = (b_1 b_2 \cdots b_m) \in \mathbb{Z}_2^m$. Määritellään, että $a \preceq b$, jos $a_i \preceq b_i$ kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Nyt osittain järjestetyn joukon ehdot pätevät. Osoitetaan, että joukko $(\mathbb{Z}_2^m, \preceq)$ on myös Boolen algebra.

Osoitetaan, ensin että kyseessä on hila. Huomataan seuraavaksi, että alkioiden a ja b pienin yläraja $a \vee b$ muodostuu valitsemalla $(a \vee b)_i = \max(a_i, b_i)$ kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Samaan tapaan alkioiden a ja b suurin yläraja $a \wedge b$ saadaan valitsemalla $(a \wedge b)_i = \min(a_i, b_i)$ kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Täten rakenne on myös hila.

Osoitetaan sitten, että kyseinen hila on Boolen algebra. Selvästi $I = (111 \cdots 1)$ ja $O = (000 \cdots 0)$, joten suurin ja pienin alkio ovat yksikäsitteiset ja olemassa. Alkion a komplementti a' on alkio, jossa toisiaan vastaavat bitit ovat vastakkaiset: jos alkion a bitti a_i on 0, alkiolla a' pätee $a_i' = 1$ ja päinvastoin. Algebrallisesti tämä voidaan ilmaista merkinnällä $a' = I - a$. Selvästi myös alkion komplementti on yksikäsitteinen.

Osoitetaan vielä distributiivisuus. Huomataan, että $\mathbb{Z}_2^m$ on isomorfinen joukon $\mathcal{P}(X)$ kanssa, missä $X = \{1, 2, \ldots, m\}$. Nyt kun $A \in \mathcal{P}(X)$, on A muotoa $A = \{j, k, \ldots, l\}$, missä joukkoon A kuuluvat alkiot ovat mielivaltaisia alkioita joukosta X. Määritellään nyt isomorfismi siten, että kun $j \in A$, niin $a_j = 1$, missä a_j on alkion $a \in \mathbb{Z}_2^m$ j. bitti. Esimerkiksi jos $\mathbb{Z}_2^m = \mathbb{Z}_2^5$, niin valitaan $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nyt jos esimerkiksi $A = \{2, 4, 5\}$, niin vastaavasti $a = (01011)$. Näin saadaan muodostettua bijektio joukkojen $\mathbb{Z}_2^m$ ja $\mathcal{P}(X)$ välille. Koska tiedetään, että $\mathcal{P}(X)$ on Boolen algebra ja joukot ovat isomorfiset, niin myös $\mathbb{Z}_2^m$ on täten Boolen algebra.

4 Sovelluksia: virtapiirit

Boolen algebroiden hyödyllisyys modernin teknologian kehityksessä on viime vuosikymmenien aikana kasvanut merkittävästi. Tässä luvussa havainnollistetaan lyhyesti Boolen algebroiden yhtä sovellusaluetta tutustumalla kytkentöihin ja virtapiireihin.

Boolen algebroita voidaan käyttää apuna esimerkiksi virtapiirien yksinkertaistamisessa ja havainnollistamisessa. Luvun lähdekirjallisuutena on käytetty sekä Papantonopouloun teosta *Algebra: Pure and Applied* että Judsonin teosta *Abstract Algebra Theory and Applications*.

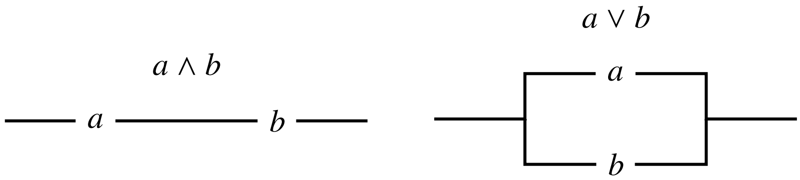
4.1 Perusominaisuuksia

Tutustutaan seuraavaksi yksinkertaisiin kytkentöihin esimerkkien avulla.

Kytkin on laite, joka voi olla kahdessa asennossa: joko *auki* tai *kiinni*. Kun kytkin on auki, sähkövirta ei pääse läpäisemään sitä. Vastaavasti kytkimen ollessa kiinni, pääsee sähkövirta läpi. Nämä tilat ovat toisensa poissulkevat, eli kytkin ei voi olla sekä auki että kiinni samanaikaisesti. Lisäksi jos useampi eri kytkin on aina samassa tilassa toisen kytkimen kanssa, merkitään niitä jatkossa samalla kirjaimella.

Esimerkki 4.1. Kuviossa 4.1 on esitetty kaksi esimerkkiä kytkennöistä. Kummassakin kytkennässä on kaksi kytkintä, jotka on nimetty kirjaimilla a ja b. Ensimmäisessä diagrammissa kytkimet on kytketty *sarjaan*. Tämä tarkoittaa, että kummankin kytkimen on oltava kiinni, jotta sähkövirta pääsee kulkemaan. Kyseinen sarjakytkentä voidaan ilmaista merkinnän $a \wedge b$ avulla.

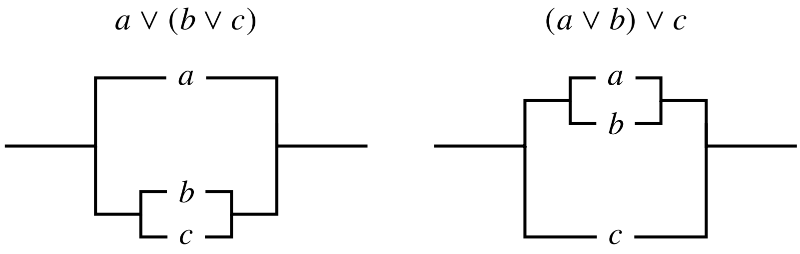
Toisessa diagrammissa kytkimet taas on kytketty *rinnakkain*. Tässä tilanteessa riittää, että ainakin toinen kytkimistä on kiinni, jotta sähkövirta pääsee kulkemaan. Kyseinen rinnakkaiskytkentä voidaan ilmaista merkinnän $a \vee b$ avulla.



Kuvio 4.1. Kytkennät $a \wedge b$ ja $a \vee b$ vierekkäin.

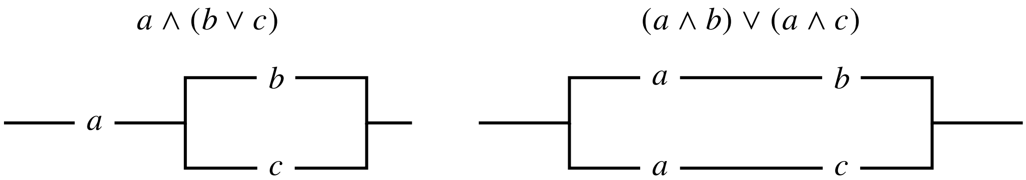
Määritellään, että kaksi kytkentää ovat keskenään ekvivalentit, jos ne käyttäytyvät yhdenmukaisesti.Tämä tarkoittaa, että jos kytkimet asetetaan kummassakin virtapiirissä täsmälleen samaan asentoon, niin tulos on sama. Esimerkiksi virtapiiri $a \wedge b$ on täsmälleen sama kuin virtapiiri $b \wedge a$. Kyseinen esimerkki on itse asiassa Boolen algebroillekin pätevä kommutatiivisuussääntö. Kytkentöjä esittäviä diagrammeja voidaan käyttää havainnollistamaan myös muita hilojen ja Boolen algebrojen ominaisuuksia. Näin on tehty myös alla olevissa esimerkeissä.

Esimerkki 4.2. Kuviossa 4.2 havainnollistetaan hiloille ja Boolen algebroille voimassa olevaa liitännäisyyttä. Diagrammeista huomataan, että virtapiirit ovat toiminnaltaan täysin samat. Tässä tapauksessa riittää, että jokin kytkimistä a, b tai c on kiinni, jolloin virta pääsee kulkemaan.



Kuvio 4.2. Liitännäisyys $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ pätee.

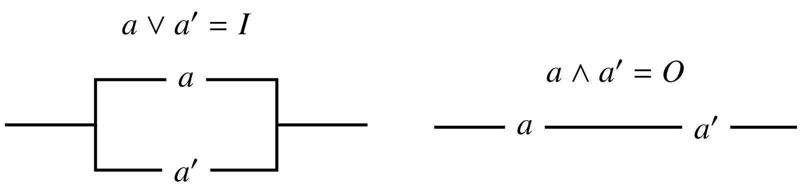
Esimerkki 4.3. Kuviossa 4.3 taas on havainnollistettu distributiivisuutta kytkentöjen avulla. Lopputulos kummassakin virtapiirissä on sama: jotta virta päsee kulkemaan, on kytkimen a oltava kiinni. Tässä tapauksessa riittää kuitenkin, että b tai c on kiinni.



Kuvio 4.3. Distributiivisuus $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ pätee.

Esimerkki 4.4. Kytkimen, jonka toiminta on päinvastaista kytkimeen a verrattuna, sanotaan olevan kytkimen *a komplementti*, ja sitä merkitään notaatiolla a'. Jälleen symboleilla a sekä a' voidaan tarkoittaa useampaa kytkintä, joiden toiminta on täsmälleen sama.

Kuviossa 4.4 on havainnollistettu komplementtien toimintaa kytkennöissä. Huomataan, että kun komplementit on kytketty rinnakkain, virta pääsee kulkemaan aina. Kun taas kytkimet on kytketty sarjaan, virran kulkeminen on mahdotonta. Symbolilla I tarkoitetaankin tässä tapauksessa kytkentää, joka on aina suljettu, ja symbolilla O kytkentää, joka on aina avoin.



Kuvio 4.4. Komplementtien määritelmä pätee.

Taulukossa 4.1 pyritään havainnollistamaan Boolen algebroihin liittyvien käsitteiden välistä yhteyttä. Taulukkoon on koottu yleisten merkintöjen lisäksi tutkielman esimerkeissä esiintyvien joukkojen merkintöjä, kuten potenssijoukkoon ja kytkentöihin liittyvät merkinnät. Merkinnällä $B(n)$ tarkoitetaan tässä yhteydessä joukkoa, joka sisältää kaikki kokonaisluvun n jakavat positiiviset kokonaisluvut, ja joka täyttää Boolen algebran määritelmän.

Boolen algebra	$\mathcal{P}(X)$	$B(n)$	kytkentä
$\wedge$	$\cap$	syt	sarja
$\vee$	$\cup$	pyj	rinnakkainen
a'	$S \setminus \{a\}$	n/a	komplementti
O	$\emptyset$	1	avoin
I	S	n	suljettu
$=$	$=$	$=$	ekvivalentti
$a \leq b$	$a \subseteq b$	$a \mid b$	a suljettu $\Rightarrow$ b suljettu

Taulukko 4.1. Boolen algebraan liittyvää terminologiaa.

4.2 Kytkentöjen yksinkertaistaminen

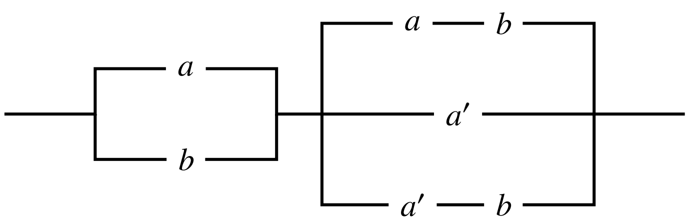
Virtapiirien joukon määritteleminen Boolen algebraksi ja sen tarkka todistaminen sivuutetaan vetoamalla lähdekirjallisuuteen [5] ja [7]. Boolen algebroille voimassa olevia sääntöjä voidaan käyttää apuna virtapiirien yksinkertaistamisessa, kuten tässä alaluvussa olevissa esimerkeissä on tehty.

Esimerkki 4.5 (vrt. harjoitustehtävä 10 [5, s. 241])**.** Yksinkertaistetaan seuraavaksi kuviossa 4.5 näkyvää kytkentää käyttämällä apuna Boolen algebroille esitettyjä sääntöjä. Diagrammin perusteella kytkennän lausekkeeksi saadaan

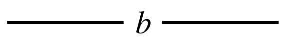
$$(a \vee b) \wedge [(a \wedge b) \vee a' \vee (a' \wedge b)].$$

Käyttämällä ensin vaihdannaisuutta, saadaan lauseke muotoon $(a \vee b) \wedge [(a \wedge b) \vee a' \vee (a' \wedge b)] = (a \vee b) \wedge [(b \wedge a) \vee (a' \wedge b) \vee a']$. Nyt käyttämällä distributiivisuutta ja sen jälkeen komplementin määritelmää saadaan $(a \vee b) \wedge [(b \wedge a) \vee (a' \wedge b) \vee a'] = (a \vee b) \wedge [(b \wedge (a \vee a')) \vee a'] = (a \vee b) \wedge [(b \wedge I) \vee a'] = (a \vee b) \wedge (b \vee a')$. Jälleen käyttämällä vaihdannaisuutta ja distributiivisuutta $(a \vee b) \wedge (b \vee a') = (b \vee a) \wedge (b \vee a') = b \wedge (a \vee a')$. Nyt komplementin määritelmän nojalla $b \wedge (a \vee a') = b \wedge I = b$.

Kyseinen kytkentä on siis saatu yksinkertaistettua merkittävästi kattamaan vain yhden kytkimen b. Lopputulos on esitetty kuviossa 4.6.

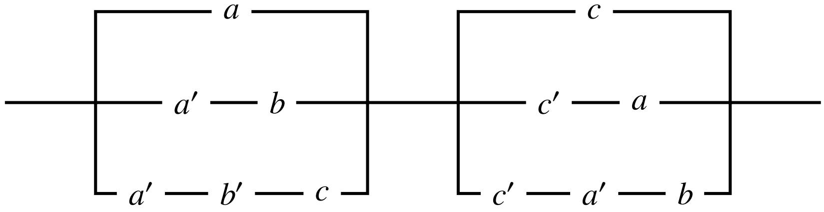


Kuvio 4.5. Yksinkertaistettavana oleva kytkentä.



Kuvio 4.6. Lopputulos yksinkertaistamisen jälkeen.

Esimerkki 4.6. Yksinkertaistetaan nyt kuviossa 4.7 näkyvää kytkentää Boolen algebroille esitettyjen sääntöjen nojalla. Huomataan ensin, että kytkentä muodostuu kahdesta osasta, kuten kuviossa 4.8 on esitetetty. Yksinkertaistetaan kumpaakin osaa ensin erikseen, jotta käsittely on helpompaa.



Kuvio 4.7. Yksinkertaistettavana oleva kytkentä.

Kuvio 4.8. Apukuvio yksinkertaistamisen tueksi.

Aloitetaan ensimmäisestä osasta A. Diagrammin perusteella kytkennän lausekkeeksi saadaan

$$a \vee (a' \wedge b) \vee (a' \wedge b' \wedge c).$$

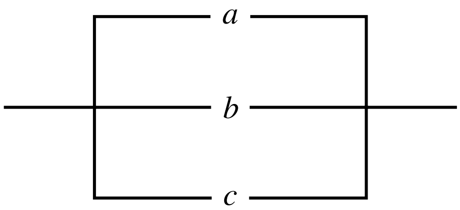
Käyttämällä ensin distributiivisuutta ja komplementin määritelmää saadaan $a \vee (a' \wedge b) \vee (a' \wedge b' \wedge c) = [(a \vee a') \wedge (a \vee b)] \vee (a' \wedge b' \wedge c) = (a \vee b) \vee (a' \wedge b' \wedge c)$. Käyttämällä sitten liitännäisyyttä ja sen jälkeen jälleen distributiivisuutta saadaan $(a \vee b) \vee (a' \wedge b' \wedge c) = (a \vee b) \vee [(a' \wedge b') \wedge c] = [(a \vee b) \vee (a' \wedge b')] \wedge [(a \vee b) \vee c]$. Nyt De Morganin lakien nojalla pätee $[(a \vee b) \vee (a' \wedge b')] \wedge [(a \vee b) \vee c] = [(a \vee b) \vee (a \vee b)'] \wedge [(a \vee b) \vee c]$. Komplementin määritelmän nojalla lauseke saadaan lopulta yksinkertaiseen muotoon $[(a \vee b) \vee (a \vee b)'] \wedge [(a \vee b) \vee c] = I \wedge [(a \vee b) \vee c] = (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$.

Käsitellään sitten samaan tapaan osa B. Diagrammin perusteella lausekkeeksi saadaan

$$c \vee (c' \wedge a) \vee (c' \wedge a' \wedge b).$$

Huomataan, että lauseke on täsmälleen sama, kuin osassa A, mutta nyt $a = c$, $b = a$ ja $c = b$. Tällä perusteella lauseke saadaan osion A nojalla muotoon $c \vee a \vee b$.

Yhdistetään vielä lausekkeet yhdeksi kokonaisuudeksi. Tällöin siis $A \wedge B = (a \vee b \vee c) \wedge (c \vee a \vee b)$. Vaihdannaisuuden nojalla $(a \vee b \vee c) \wedge (c \vee a \vee b) = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee c)$. Nyt idempotenssin nojalla $(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee c) = a \vee b \vee c$. Täten kytkentä on saatu yksinkertaistettua kuviossa 4.9 näkyvän diagrammin muotoon.



Kuvio 4.9. Lopputulos yksinkertaistamisen jälkeen.

Lähteet

[1] Birkhoff, G., Bartee, T. C., *Modern Applied Algebra*, International Student Edition, McGraw Hill, 1970.

[2] Bloch, N. J., *Abstract Algebra with Applications*, Prentice-Hall, State University of New York, 1987.

[3] Boyer, C., *Tieteiden kuningatar*, Matematiikan historia osa 2, Art House, 1994.

[4] Eronen, M., *Hilateoriaa*, Pro gradu –tutkielma, Tampereen yliopisto, 1993.

[5] Judson, T. W., *Abstract Algebra Theory and Applications*, Stephen F. Austin State University, 2016.

[6] Kolman, B., Busby, R., Ross, S., *Discrete Mathematical Structures*, sixth edition, Pearson Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2009.

[7] Papantonopoulou, A., *Algebra: Pure and Applied*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2002.